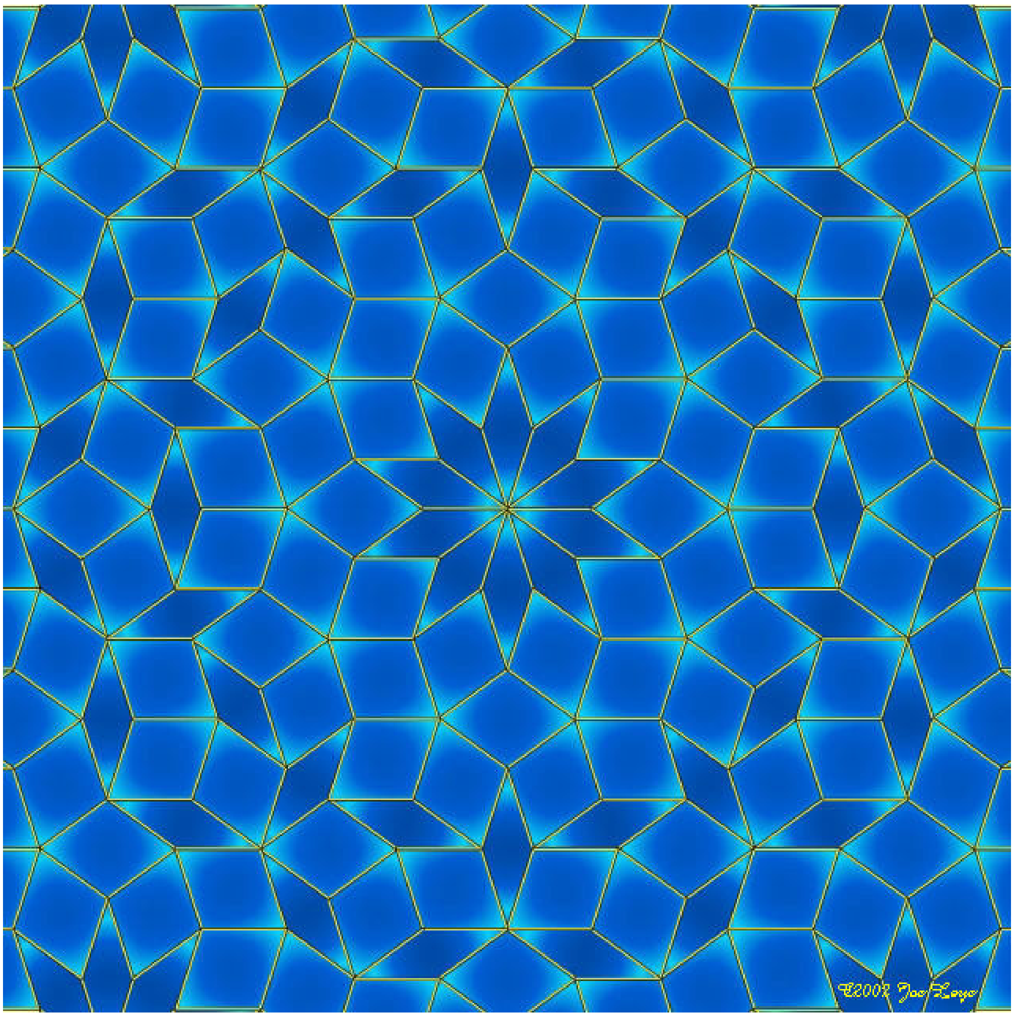
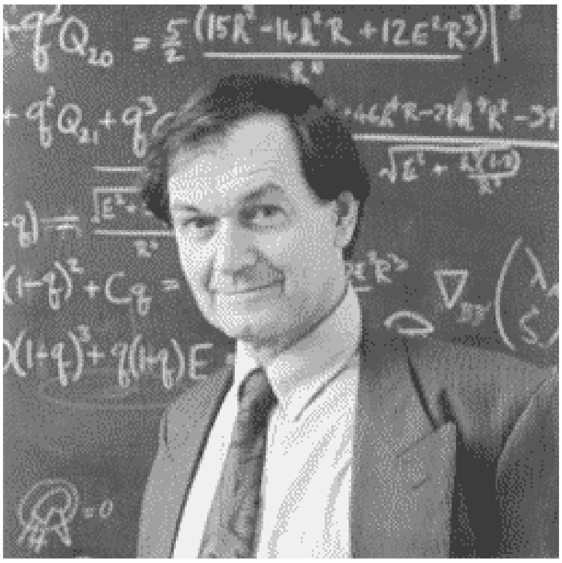
Pavages de Penrose

Par Jean-Christophe Lavocat



Résumé :
Ce texte n'a pas pour but de s'étendre sur toutes les caractéristiques (étonnantes) des pavages de Penrose, mais plutôt de présenter par leur intermédiaire une vue d'ensemble des propriétés des pavages, telle que les isométries ou bien la périodicité. Il s'agira tout d'abord de définir concrètement ce qu'est un pavage, puis de s'approcher de proche en proche des diverses notions abordées.

Table des matières :



Roger Penrose

I) Généralités sur les pavages :

a) Introduction :

La définition du pavage nécessite la compréhension mathématique de notions relatives aux ensembles, telles que celles de frontière, et d'intérieur ou celle d'ensemble fermé.

La **frontière** d'un ensemble E (notée Fr(E)) correspond à l'ensemble des points qui sont au contact de E, et de son complémentaire ($\overline{E}$).

L'**intérieur** de cet ensemble E (int(E)) est l'ensemble des points de E n'étant pas sur la frontière (int(E) = E \ Fr(E)).

L'**extérieur** de E (ext(E)) est l'intérieur du complémentaire de E (ext(E) = int($\overline{E}$)).

On dit de l'ensemble E qu'il est fermé lorsqu'il contient sa frontière . On parle alors de **fermé** pour caractériser un ensemble fermé quelconque. De la même manière, un **ouvert** caractérise un ensemble qui ne contient aucun point de sa frontière.

(Remarque : Un ensemble est à la fois ouvert et fermé si et seulement si sa frontière est vide.)

Définition du pavage : Soit E un ensemble. On dit que des sous-ensembles de E réalisent un **pavage** de E si les conditions suivantes sont réunies :

- Chacun de ces sous-ensembles est un fermé d'intérieur non vide.
- La réunion de ces sous-ensembles est égale à E.
- Deux quelconques de ces sous-ensembles ont toujours une intersection vide ou une intersection contenue dans leur frontière.

Si des sous-ensembles de E réalisent un tel pavage de E, on les appelle des **pavés**. Dans un espace à 2 dimensions, on peut aussi appeler ces sous-ensembles des **tuiles**.

Un pavage représente donc plus familièrement le recouvrement d'un plan (Euclidien ou non) ou de l'espace par un ou plusieurs motifs (dans notre étude des polygones réguliers) qui se répètent sans laisser d'espaces vides et sans se chevaucher.

b) Pavages euclidiens :

Nous appellerons **pavage polygonal sommital du plan**, un pavage du plan par des polygones réguliers, vérifiant les conditions suivantes :

- Si un sommet S d'un polygone P du pavage appartient à un autre polygone P' du pavage, alors S est aussi un sommet de P'. Si S n'est pas un sommet de P', mais qu'il appartient à l'un de ses côtés, on ne parle plus de pavage sommital.
- Si S et S' sont deux sommets quelconques de polygones du pavage, il existe toujours une isométrie f du pavage telle que f(S) = S'. (Voir *page 11*).

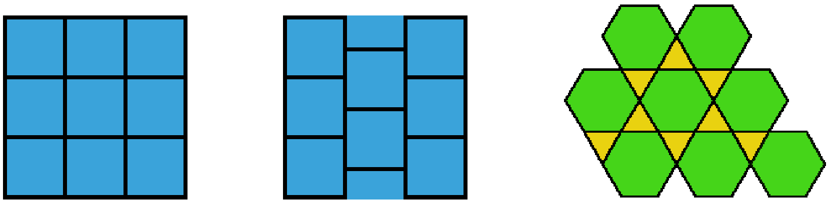


Figure 1 : Le premier pavage correspond à l'un des pavages polygonaux sommitaux les plus intuitifs : un pavage avec des carrés dont les sommets sont accolés. Les deux pavages de droite ne sont pas polygonaux sommitaux car pour le premier, les sommets ne sont pas accolés, et pour le deuxième, les polygones ne sont pas identiques. Le second pavage est caractérisé de **pavage semi-régulier.**

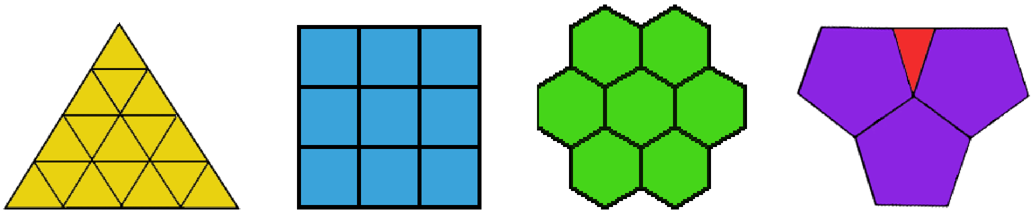


Figure 2 : Le plan n'accepte que trois pavages polygonaux sommitaux : le premier constitué de triangles équilatéraux, le deuxième constitué de carrés, et le dernier formé d'hexagones réguliers. Dans le cas des pentagones, l'angle formé par l'un des sommets n'est pas un multiple de π. Par conséquent il est impossible de paver le plan avec des pentagones réguliers sans laisser de vides.

Cette section du dossier portant uniquement sur les pavages polygonaux sommitaux du plan, nous les appellerons simplement pavages pour plus de simplicité.

Remarque : La *figure 1* fournit l'exemple d'un pavage polygonal sommital, et de deux autres pavages qui ne respectent pas les deux conditions qui feraient d'eux des pavages polygonaux sommitaux.

Dans le plan euclidien, espace à courbure nulle (nous reviendrons sur cette notion dans la section suivante), il existe uniquement 3 pavages (polygonaux sommitaux). Les polygones à n côtés qui peuvent être utilisés comme pavés sont le triangle équilatéral (n=3), le carré (n=4) et l'hexagone régulier (n=6). On peut se demander pourquoi le pentagone régulier (n=5) ne peut servir de pavé. La réponse en est donné par la *figure 2* et la démonstration ci-dessous :

Démonstration : Soit P un pavage de polygones à n côtés. Deux côtés adjacents d'un de ces polygones forment un angle α de $180\text{-}360/n$ ° = $\pi\text{-}2\pi/n$ rad (en effet, si on le découpe en n-2 triangles, on voit que la somme des n angles égaux de ce polygone à n côtés est $(n-2)\times 180$).

Si l'on juxtapose k polygones à un même sommet, l'angle de la nouvelle figure vaut $k\times\alpha$, où α désigne la mesure de l'angle au sommet du polygone donné. Pour que les polygones puissent se juxtaposer sans se superposer ni laisser d'espace (comme il convient dans un pavage), il faut que:

$$k \text{ x } \alpha = 360°$$

$$\Leftrightarrow k\,(180 - 360/n) = 360,$$

D'où: $k = (2 \times n)/(n\text{-}2)$.

On a ainsi pour : $n=3$, $k=6$,
$n=4$, $k=4$,
$n=5$, $k=10/3$,
$n=6$, $k=3$,

On trouvera donc autour d'un sommet A donné du pavage, six triangles dans le cas d'un pavage avec des triangles équilatéraux, quatre carrés dans le cas d'un pavage avec des carrés, et trois hexagones réguliers dans celui avec des hexagones. Le cas d'un pavage avec des pentagones est donc impossible dans un espace euclidien, k n'étant pas un nombre entier.

$$\lim_{n\to+\infty} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n\text{-}2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{(1\text{-}\frac{2}{n})n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1\text{-}\frac{2}{n}} = 2 \qquad (\text{car } \lim_{n\to+\infty} 1\text{-}\frac{2}{n} = 1)$$

Il sera donc impossible d'obtenir un pavage avec des polygones à $n \geqslant 7$ côtés, étant donné que k doit être un entier, et qu'un polygone doit comporter au moins trois côtés.

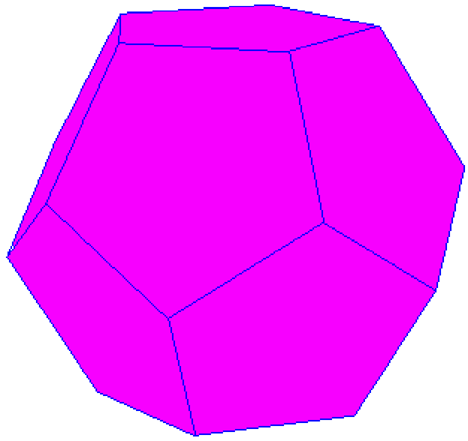


Figure 3 : Le pentagone a la propriété de pouvoir paver un espace courbe. Par exemple 12 pentagones réguliers donnent, on le voit ici, un dodécaèdre régulier.

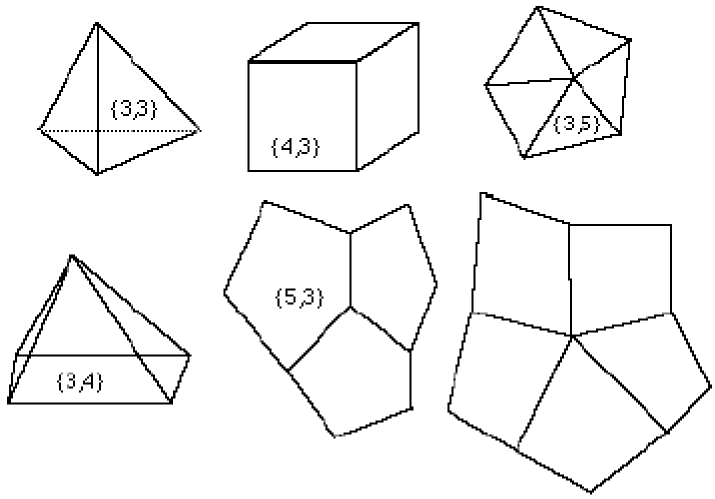


Figure 4 : Une surface de courbure non nulle peut être pavée de 5 façons différentes si sa courbure est positive, et d'une infinité de façons différentes si sa courbure est négative.

c) Pavages de plans non-euclidiens :

S'il est impossible de paver un plan Euclidien avec des pentagones réguliers, il est tout à fait faisable de le faire dans un espace courbe. Douze pentagones ainsi assemblés forment un dodécaèdre pentagonal. Ce dodécaèdre peut être associé à une sphère car il s'agit d'une **surface à courbure constante positive** (voir *figure 3*).

Utilisons pour décrire nos pavages la notation suivante : $\{n, k\}$, où n est le nombre de côtés du polygone, et k le nombre de polygones nécessaires pour paver le plan autour d'un sommet A.

Les trois solutions de la démonstration précédente sont donc :
$\{3,6\} \Leftrightarrow$ six triangles autour de A
$\{4,4\} \Leftrightarrow$ quatre carrés autour de A
$\{6,3\} \Leftrightarrow$ trois hexagones autour de A

Par contre le cas $\{5,3\}$ n'est pas possible comme nous l'avons dit plus haut.

De la même manière, il existe cinq pavages d'une surface à courbure positive :

$\{3,3\} \Leftrightarrow$ on obtient avec trois triangles trois faces d'un tétraèdre.

$\{3,4\} \Leftrightarrow$ quatre triangles assemblés forment les quatre faces d'une pyramide à base carrée dont le point A est le sommet
$\{4,3\} \Leftrightarrow$ trois carrés s'assemblent selon les trois faces d'un cube.
$\{5,3\}$ et $\{3,5\}$ recouvrent eux aussi un espace courbé positivement.
A présent, si l'on essaie de paver une surface avec cinq carrés, six triangles, ou bien quatre hexagones, on obtient une surface à courbure négative (voir *figure 4* pour quelques exemples).

Propriété : Soit α la mesure de l'angle du polygone. Dans un pavage $\{n, k\}$constitué de k polygones à n côtés, on a :

- Si $\alpha \times k < 2\pi$, alors le pavage décrit une surface à courbure positive, dite surface sphérique
- Si $\alpha \times k = 2\pi$, alors le pavage décrit une surface à courbure nulle, dite surface euclidienne
- Si $\alpha \times k > 2\pi$, alors le pavage décrit une surface à courbure négative, dite surface elliptique

Avec le pavage $\{4,4\}$ par exemple on aura $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $k = 4$ d'où $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$. La surface décrite est bien à courbure nulle.

Avec le pavage $\{3,8\}$, on a $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $k = 8$ d'où $\frac{8\pi}{3} > 2\pi$. La surface possède donc une courbure négative. Contrairement aux surfaces à courbure positive, il existe une infinité de façons de paver une surface à courbure négative.

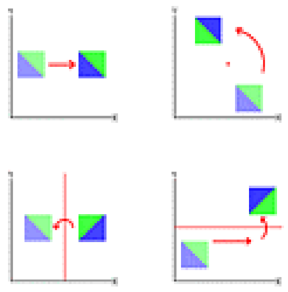


Figure 5 : Parmi les isométries on distingue la translation, la rotation, la symétrie orthogonale et la symétrie glissée. La symétrie centrale n'est pas représentée ici car elle peut s'apparenter à une rotation de 180° comme sur la figure en haut à droite.

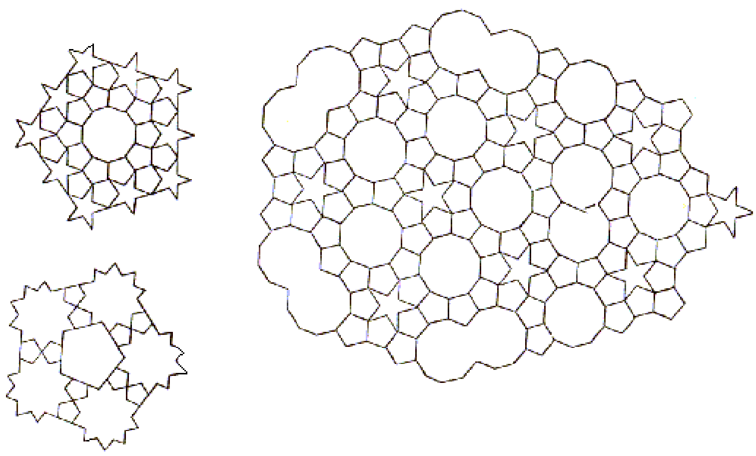


Figure 6 : Kepler fut le premier à étudier les pavages réguliers ayant une symétrie d'ordre 5.

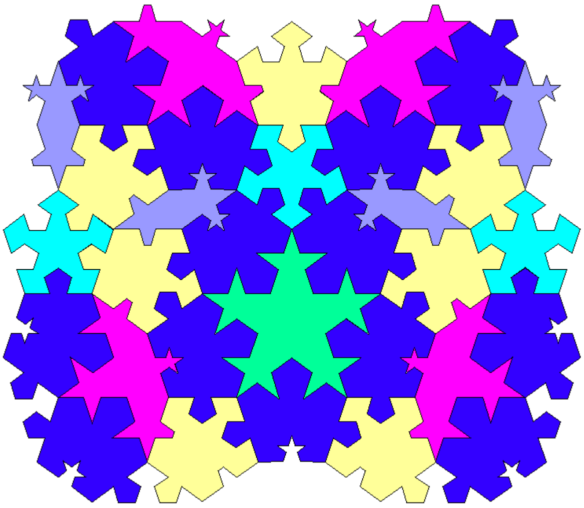


Figure 7 : Le premier pavage que Penrose réalisa possède quelques ressemblances avec celui de Kepler.

II) Pavages Quasi-périodiques :

a) Pavages et symétries :

On dit que deux tuiles sont **isométriques** si l'on peut passer de l'une à l'autre par une isométrie f. On dit qu'un pavage est **régulier** si tous les pavés sont isométriques. Autrement dit, tous les pavages sont du même modèle. On dit par contre qu'un pavage est **semi-régulier** lorsqu'il y a un nombre fini de modèles de pavés. Autrement dit, lorsqu'il existe des pavés P_1, P_2, ... , P_n, tels que tout pavé du pavage est superposable à l'un de ces n pavés (voir *figure 2*).

On dit qu'une isométrie f est une **isométrie du pavage**, ou encore que f laisse le pavage globalement **invariant**, si pour tout pavé P du pavage, f(P), son ensemble image par f, est encore un pavé du pavage.

On appelle **groupe de symétrie** d'un pavage l'ensemble de toutes les isométries qui conservent le pavage. C'est Fedorov qui, en 1891, a mis en évidence les 17 groupes de symétrie qui pouvaient s'appliquer au plan. On distingue les translations, les rotations et les réflexions : symétrie orthogonale, centrale, et glissée (voir *figure 5*). Parmi ces 17 groupes, 7 ne comprennent pas de symétries orthogonales.

b) Pavage et périodicité :

Comme nous l'avons démontré plus haut, il ne peut exister dans un pavage périodique que des rotations de 60, 90, 120 et 180 degrés. Ces groupes constituent ce que l'on appelle les **groupes cristallographiques** par analogie avec les groupes conservant les cristaux dans l'espace euclidien à 3 dimensions. A l'opposé de ces groupes de symétrie d'ordre 6, 4, 3 ou 2, il n'existe aucun pavage périodique correspondant à la symétrie d'ordre 5. Ces pavages périodiques existent malgré tout dans des espaces de dimension supérieure à 3.

C'est grâce au mathématicien/physicien Roger Penrose que ce type de pavage périodique acceptant une symétrie d'ordre 5, mais existant dans une espace de dimension supérieur à 3, a été pour la première fois représenté. Sa projection orthogonale sur un plan de dimension 2 fait perdre (à nos yeux seulement) la **périodicité** originelle dont était doté le pavage. Toutefois, le pavage obtenu hérite d'une régularité dans son apparence, on y observe des répétitions à toute échelle. On appelle ces pavages ‘‘**pavages quasi-périodiques**’’.

Les premiers pavages quasi-périodiques n'ont pas été découverts par Roger Penrose, mais par Kepler qui fut le premier à s'intéresser aux pavages avec une symétrie d'ordre 5. La *figure 6* présente quelques-unes unes de ses réalisations.

Le premier pavage périodique que Penrose découvrit comportait 6 tuiles élémentaires. Il obtenait alors le pavage représenté à la *figure 7.*Ce pavage bien que quasi-périodique est moins impressionnant que le précédent et que le suivant, car il est formé grâce à 6 tuiles (reconnaissons le assez peu ‘‘esthétiques’’) ce qui retire un certain charme à la découverte mathématique.

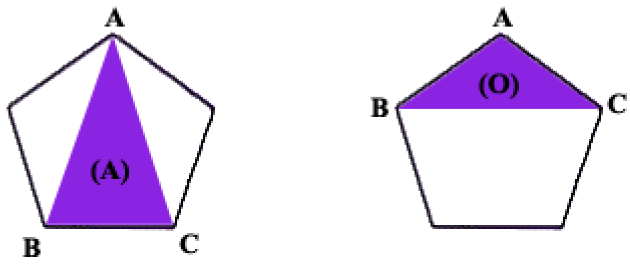


Figure 8 : Le pentagone régulier peut être décomposé en trois triangles : deux triangles obtus, et un triangle aigu. Ces triangles respectant les proportions du nombre d'or sont appelés triangles d'or.

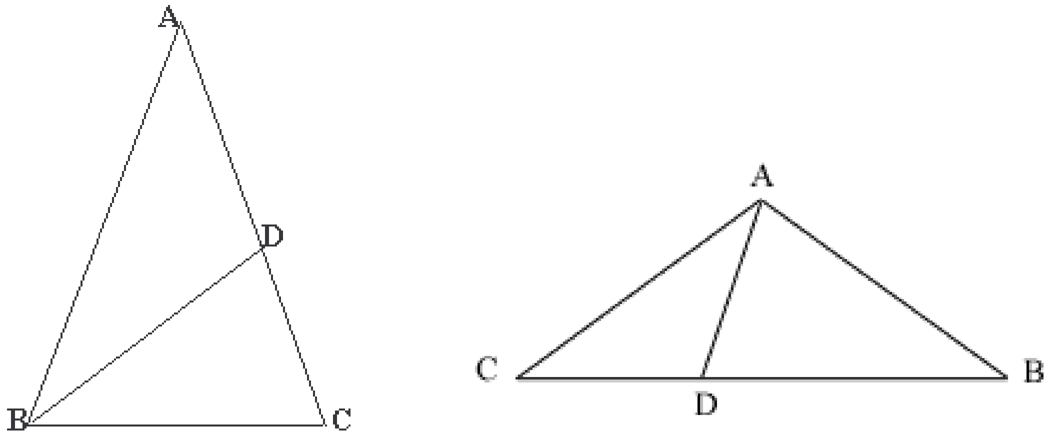


Figure 9 : Un triangle d'or aigu ABC peut être ''divisé '' en deux autres triangles d'or : un aigu BCD, et un obtus ABD. De la même façon, un triangle obtus peut former un triangle d'or aigu, ici ACD, et un autre obtus, ABD.

III) Pavages de Penrose :

a) Propriétés des triangles d'or :

Revenons, pour la fin de notre étude, au pentagone. Il est possible dans le pentagone régulier de tracer les segments joignant deux côtés consécutifs : les diagonales du pentagone. En traçant deux diagonales de ce pentagone on obtient un triangle aigu (A) . De la même façon on obtient un triangle obtus (O) en ne traçant qu'une seule diagonale (voir *figure 8*). Ces deux triangles ont l'étonnante propriété de respecter des dimensions qui font d'eux des **triangles d'or :**

Démonstration :

Triangle (A) : $\widehat{BAC} = 36°$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$;
Triangle (O) : $\widehat{BAC} = 108°$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36°$;

Le nombre d'or, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos(36°)$ vérifie les affirmations suivantes (voir l'*annexe b* pour plus de renseignements) : $\varphi^2 = \varphi + 1$

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

En prenant comme unité le côté du pentagone, et en abaissant, dans chaque triangle concerné, la hauteur issue de A, on a :

- Dans le triangle (O) : $BC = 2AB \times \cos(36°) = \varphi$
- Dans le triangle (A) : $\frac{1}{2} = AB \times \cos(72°) = AB \times (2\cos(36°)^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow 1 = AB \times (4\cos(36°)^2 - 2) = AB \times (\varphi^2 - 2)$$
$$= AB \times (\varphi - 1) = \frac{AB}{\varphi} \Leftrightarrow AB = AC = \varphi$$

Les mesures du triangle (O) sont donc : AB = AC = 1 et BC = φ .
Les mesures du triangle (A) sont donc : AB = AC = φ et BC = 1.

Ces triangles, qui ont servi à Roger Penrose pour l'élaboration des pavages quasi-périodiques que nous verrons plus loin, ont aussi une autre propriété remarquable.

Propriété :
- Dans un triangle d'or aigu ABC de base [BC], la bissectrice de l'angle C coupe [AB] en D tel que BCD est un triangle d'or aigu et ACD un triangle d'or obtus (voir *figure 9*).
- De même dans un triangle d'or obtus ABC de base [BC], si D est le point de [BC] tel que BD=BA, alors ACD est un triangle d'or obtus et ABD un triangle d'or aigu.

Par conséquent, il est tout à fait possible de paver un triangle d'or grâce à d'autres triangles d'or par **décomposition**. Pour plus de détails sur cette méthode voir l'*Annexe a*.
Les triangles d'or à présent expliqués, intéressons-nous à leur utilité dans les pavages quasi-périodiques.

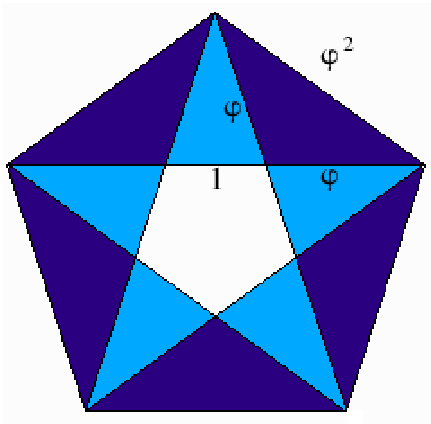


Figure 10 : Les triangles d'or ont des côtés de mesures proportionnelles à 1,φ,φ pour le triangle (A), et à φ,φ,$φ^2$ pour le triangle (O).

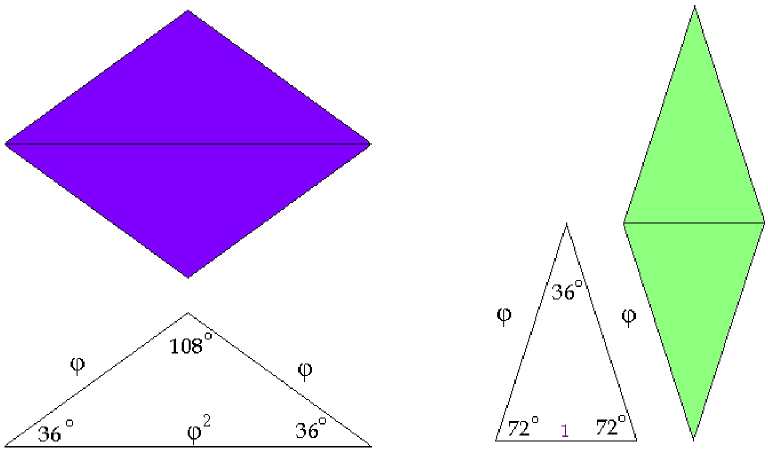


Figure 11 : Les deux losanges d'or sont formés grâce à deux triangles d'or. Le losange ''obtus'' est formé de deux triangles (O), et le losange ''aigu'' de deux triangles (A).

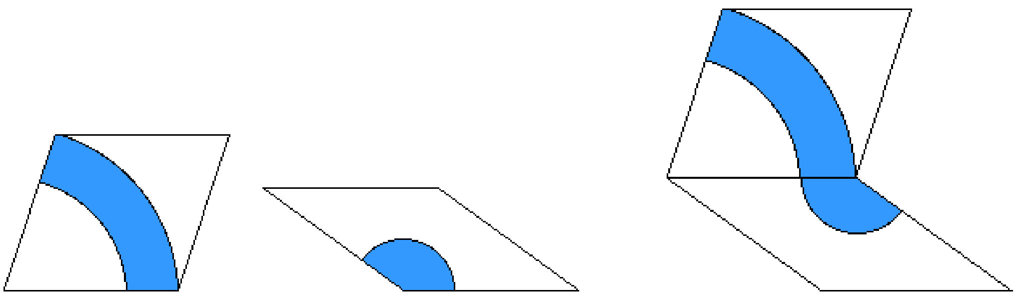


Figure 12 : Afin de paver le plan de façon non périodique, il est nécessaire de placer les tuiles selon une organisation particulière qui s'obtient facilement une fois que les tuiles sont colorées. Il suffit de ne pas briser le motif formé par la bande colorée.

b) Construction des tuiles :

Les triangles d'or sont la base des quatre tuiles essentielles que nous utiliserons par la suite pour construire ''nos'' pavages de Penrose.

Il est possible tout d'abord de former deux polygones bien connus de tout le monde : les losanges. On appelle **losanges d'or** les losanges formés à partir de deux triangles d'or. On parle de losanges d'or par analogie avec les triangles qui les ont formés. De plus, si l'on reprend la démonstration ci-dessus, en prenant cette fois pour unité la base du triangle (A) (voir *figure 10 et démonstration suivante*) on obtient des losanges avec des côtés de longueurs φ (voir *figure 11*).

Démonstration : On sait que $\varphi^2 = \varphi+1$. On sait que dans le triangle (O), BC = φ, et AB = AC = 1. Soit h une homothétie de rapport φ. Cette homothétie transforme les longueurs en BC = φ^2 et AB=AC=1. (voir *figure 10*).

Le losange de type aigu sera formé à partir de deux triangles d'or (A). Avec $\widehat{ABC} = 144°$ et $\widehat{BAD} = 36°$.
Le losange de type obtus sera formé à partir de deux triangles d'or (O). Avec $\widehat{ABC} = 72°$ et $\widehat{BAD} = 108°$.

Il existe ensuite deux polygones qui se retrouvent aussi au niveau du pentagone. On les appellera simplement ''cerf-volant'' pour le premier et ''flèche'' pour le second. Le ''cerf-volant'' est constitué de deux triangles d'or aigus, tandis que la ''flèche'' de deux triangles d'or obtus.

c) Construction des pavages :

Les deux pavages les plus connus de Roger Penrose, sont donc formés à partir de ces quatre tuiles (les losanges d'or pour le pavage de la couverture, ou les ''cerfs-volants'' et les ''flèches'' pour les pavages représentés à partir de la *figure 15*). Seulement ces pavages ne s'effectuent pas intuitivement, et il est nécessaire de suivre quelques règles (élémentaires) afin de ne pas laisser des **trous élémentaires** (voir *annexe a*).

La construction des pavages échappe alors à la définition que nous faisions tout à l'heure des pavages polygonaux sommitaux car le pavage sera composé de polygones de différentes sortes. Chacun de ces polygones constitue ce que l'on appelle (surtout chez les carreleurs) une **tomette**.

Seulement, pour paver le plan de façon quasi-périodique, il ne suffit pas de juxtaposer côte à côte chacune de ces tomettes ! En effet on s'imagine bien qu'il est facile, avec ce genre de polygones, de retomber sur un pavage périodique. Afin d'obtenir un pavage quasi-périodique, il suffit d'utiliser des tomettes ''polarisées'' , comme celles de la *figure 12*, et de les combiner en respectant la règle suivante :

- chacune de ces tuiles doit être placée bord à bord de sorte que la bande colorée soit continue.

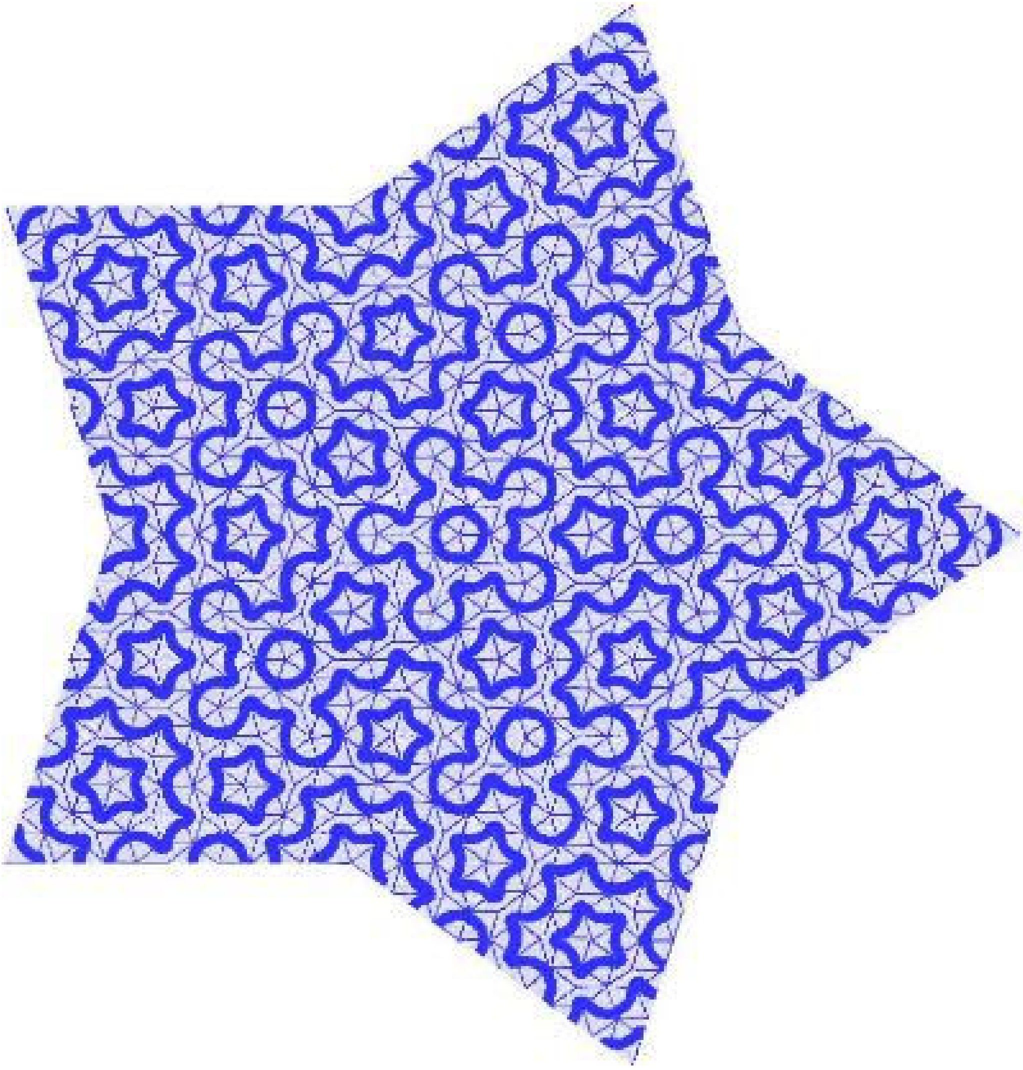


Figure 13 : Un pavage de Penrose réalisé grâce à des losanges d'or.

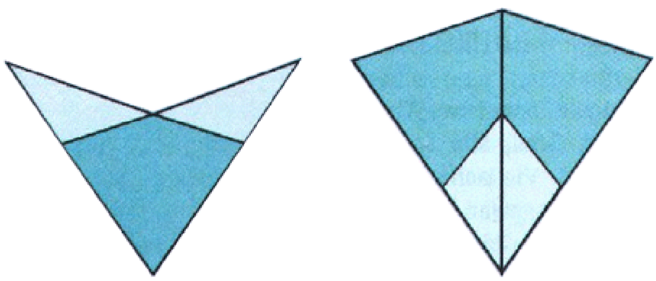


Figure 14 : Les deux tuiles, la flèche (à gauche) et le cerf-volant (à droite), du second pavage de Penrose. Cette représentation colorée possède deux avantages : elle permet, d'une part de reprendre la règle utilisée pour paver le plan avec les losanges d'or grâce à la continuité de couleur. D'autre part elle permet de s'apercevoir que la flèche peut être séparée en un cerf-volant et deux triangles d'or, et que le cerf-volant, lui, peut être partagé en deux autres cerf-volants et deux triangles d'or.

On obtient le pavage représenté à la *figure 13.* La quasi-périodicité du pavage est ici aisément reconnaissable. En effet chacun des pavages répondant aux règles précédentes marquera l'absence de structures redondantes comme dans les pavages périodiques. Un pavage quasi-périodique est un pavage dans lequel la translation ne fait pas partie du groupe de symétrie.

Le pavage de Penrose construit à l'aide de la flèche (F) et du cerf-volant (C), se réalise de la même manière. Il suffit d'utiliser des tuiles marquées grâce à une couleur différente aux extrémités qu'il ne faut pas accoler (voir *figure 14*).

On pourrait penser, qu'une fois la non-périodicité d'un pavage établi, il est possible, grâce à ces deux tuiles F et C, de créer une infinité de motifs ne répondant pas à la translation. Or cela n'est pas le cas ; la quasi-périodicité du pavage ne provient pas de motifs tous différents les uns des autres. En effet, il n'existe que sept motifs qui se répètent indéfiniment dans le plan (voir *figure 17*). Cela apporte une certaine répétitivité visuelle à ce pavage qui reste tout de même non périodique.

La découverte de pavages quasi-périodiques basés sur les losanges d'or a eu de nombreuses répercussions, notamment dans les domaines de la cristallographie. Leur construction, apparemment simple, repose sur des règles assez strictes (longueurs et disposition). Nous venons de survoler des idées qui méritent une rigueur amplement supérieure, mais nous espérons avoir atteint notre but en proposant à tous un texte attisant la curiosité, mère de toute les découvertes.

Les pages suivantes présentent quelques représentations de pavages de Penrose (pour plus d'exemple, voir le site de M. Jos Leys, cf. bibliographie), puis quelques détails sur la construction par décomposition évoquée plus haut dans ce texte.

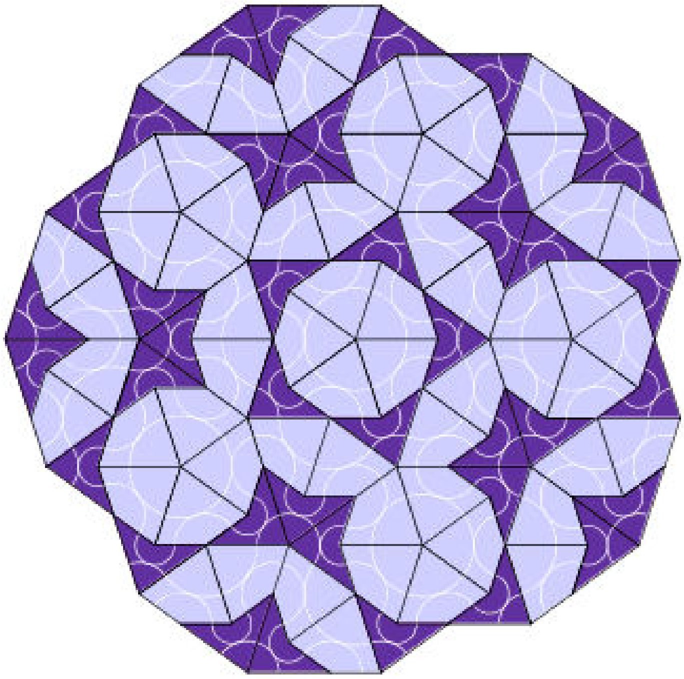


Figure 15 :

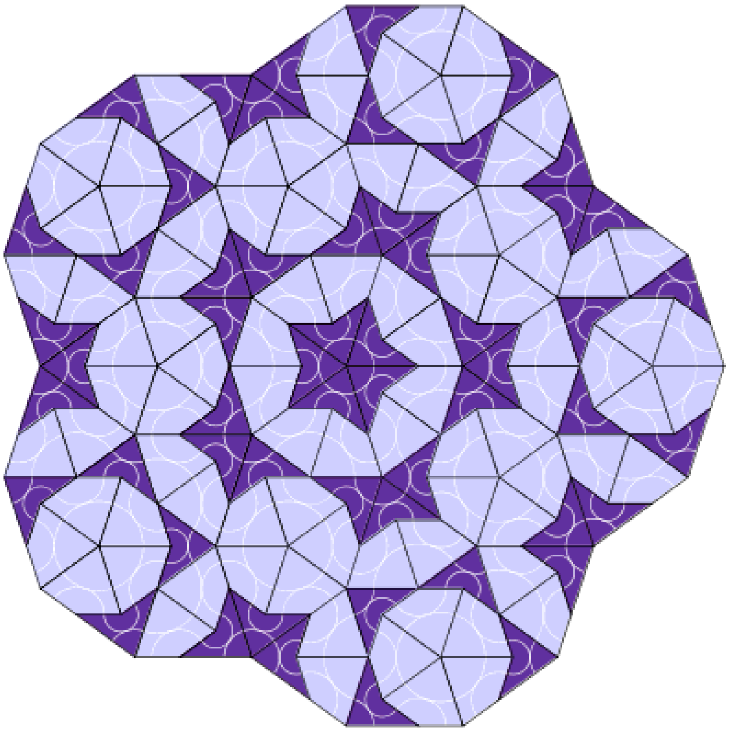


Figure 16 :

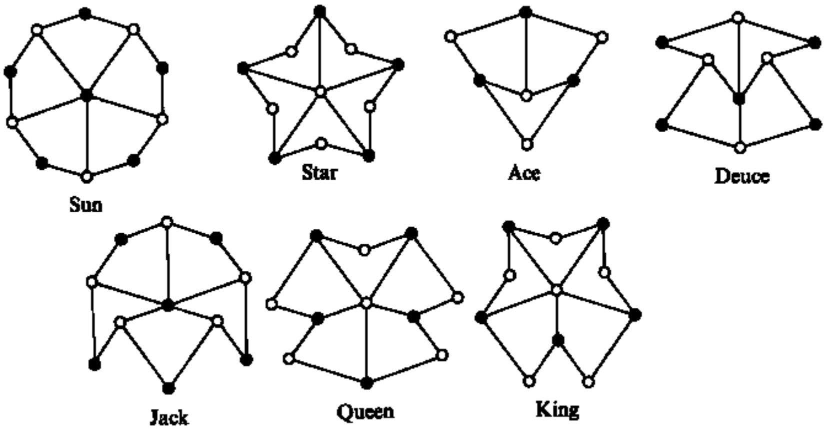


Figure 17 :

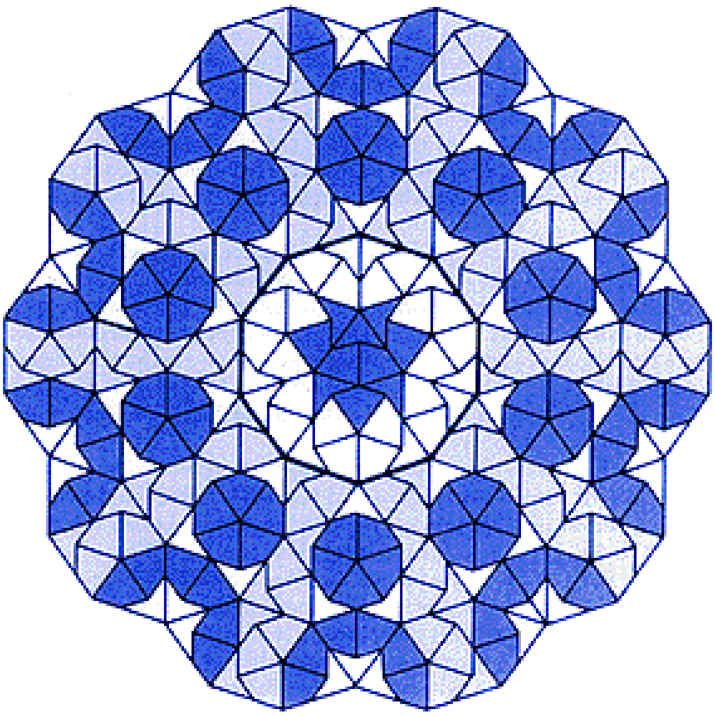


Figure 18 :

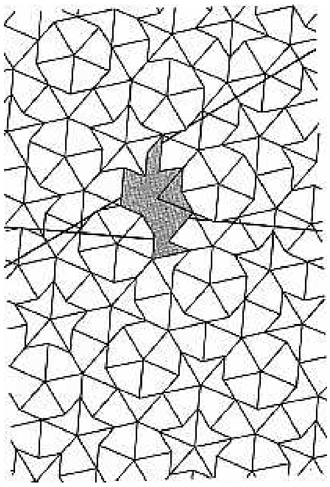


Figure 19 : Un trou essentiel dans un pavage de Penrose effectué par composition.

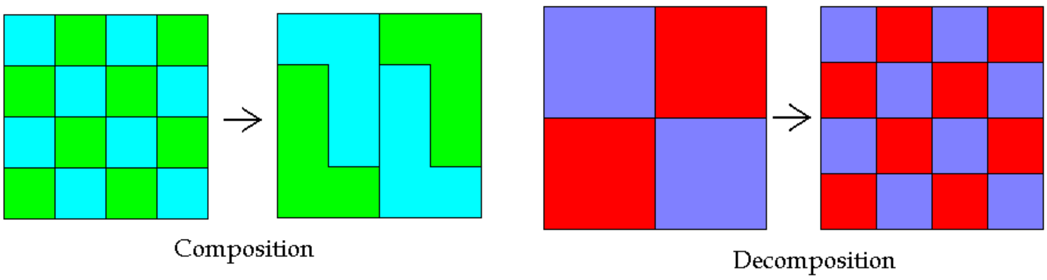


Figure 20 : La composition consiste à construire un pavage grâce à l'assemblage de tuiles alors que la décomposition consiste à décomposer une tuile élémentaire en plusieurs autres.

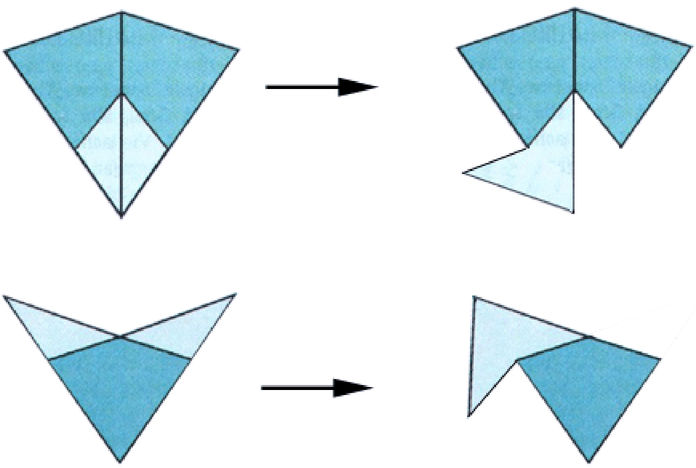


Figure 21 : La décomposition du cerf-volant donne deux cerfs-volants plus une flèche, alors que la décomposition de la flèche ne donne qu'une flèche plus un cerf-volant.

IV) Annexes :

a) La décomposition :

L'idée de construire un pavage de Penrose, en assemblant une à une les tuiles tout en suivant les règles mentionnées plus haut semble, à juste titre, très fastidieuse. En effet, après avoir placé aisément les premières tuiles, il est plus difficile d'organiser les suivantes sans laisser ce que l'on appellera des **trous élémentaires** (voir *figure 19*). La méthode qui consiste à assembler un par un les pavés d'un pavage quelconque s'appelle **composition**. La recherche mathématique a établi qu'il existait uniquement 61 formes de ces trous essentiels.

Pour éviter ces trous, il existe une méthode de construction assez simple. La **décomposition** consiste à ne partir que d'une tuile élémentaire, et à la décomposer, à la ‘‘diviser’’ en deux ou plusieurs tuiles du pavage (voir *figure 20*).

Le pavage de Penrose possède, nous l'avons dit, quatre tuiles élémentaires auxquelles nous pouvons ajouter les triangles d'or. Chacune bien sûr possède sa propre ‘‘méthode de décomposition’’. Par exemple, les tuiles les plus intéressantes à étudier sont la flèche et le cerf-volant. En effet le cerf-volant ne se divise pas en deux tuiles, mais en trois. Cela entraîne une modification singulière de la forme du pavage à chaque itération (du moins pour les premières itérations).

Un cerf-volant peut se décomposer en deux cerfs-volants plus une flèche, sans modifications de l'aire du polygone à l'arrivée (voir *figure 14 et 21*). De la même façon une flèche se décomposera en un cerf-volant et une flèche.
Pour effectuer le pavage du plan, il suffit de décomposer la tuile élémentaire, puis celles qu'elle a formées et ainsi de suite. Au bout de n opérations, la longueur des côtés de chaque tuile aura diminué d'autant. Afin de garder des pavés de longueurs constantes à chaque itération, il est nécessaire d'effectuer sur notre pavage un agrandissement d'un rapport φ.

Comme nous l'avons vu à la fin de la section III a), chacun des triangles d'or possède la propriété de se diviser en deux triangles. Toujours en suivant la méthode de décomposition, il est ainsi possible d'obtenir un pavage apériodique du plan grâce à ces triangles (voir figure *22*).

Les losanges d'or eux sont plus difficilement décomposables. Un losange d'or (O) se décompose en trois nouveaux losanges (O) plus deux losanges (A). Un losange (A) à son tour se décomposera en deux losanges (O) et deux losanges (A) (voir figure 23). Dès la septième itération, on se rend facilement compte qu'il existe une ‘‘limite de décomposition’’. En effet, chaque nouvelle itération augmentera seulement le nombre de tuiles, et non la forme globale du pavage (voir figure 24).

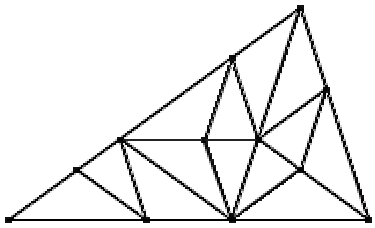


Figure 22 : Un triangle d'or (A) après 4 itérations.

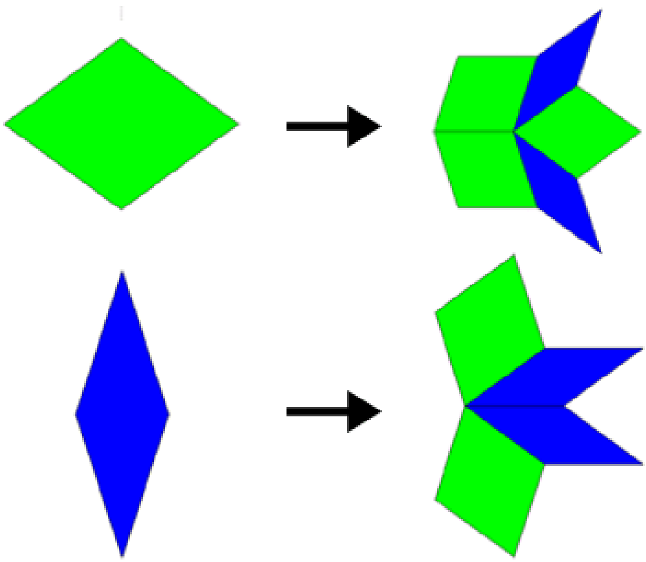


Figure 23 : La décomposition d'un losange d'or (O) donne trois losanges (O) et deux losanges (A). Celle d'un losange de type (A) donne deux losanges (O) et deux losanges (A).

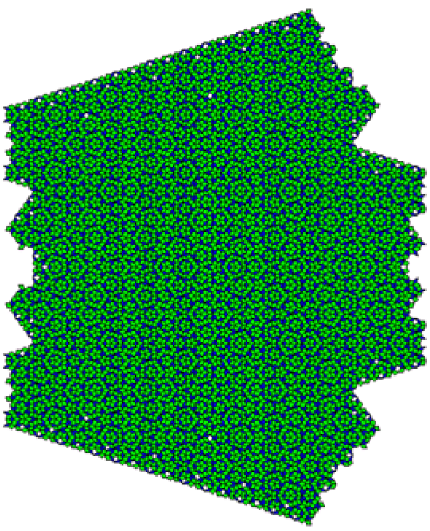


Figure 24 : Voilà la forme que prend un pavage de Penrose par décomposition d'un losange (O) après 9 itérations. Si l'on augmente le nombre d'itérations, la forme globale sera conservée.

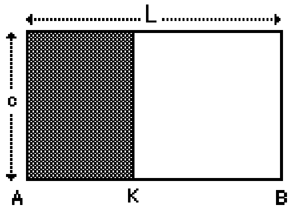
b) Le nombre d'or :

Bien que le nombre d'or (φ) soit avec le nombre Pi (π) l'un des nombres les plus médiatisés des mathématiques, sa définition et ses propriétés restent souvent méconnus du public.

Définissons d'abord le nombre d'or de la façon la plus intuitive.

Définition : Soit R un rectangle de longueur L et de largeur c. On appelle **format** d'un rectangle le quotient $\frac{Longueur}{largeur}$ (ici égal à $\frac{L}{c}$).

Retirons le carré C de côté c au rectangle initial. Le rectangle R sera nommé **rectangle d'or** si le rectangle R' formé possède le même format.



Le format de R est : $\frac{L}{c}$

Le format de R' : $\frac{c}{L-c}$

Il suffit alors de résoudre l'équation :

$$\frac{L}{c} = \frac{c}{L-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{c} = \frac{1}{\frac{L}{c}-1} \qquad \text{(on pose } x = \frac{L}{c}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \qquad \Leftrightarrow x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou bien } x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Le nombre d'or, φ est donc égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On peut dire de plus que le point K (voir dessin) réalise la **section dorée** de [AB]. ($\varphi \approx 1{,}618\ldots$)

Le nombre d'or possède de très nombreuses propriétés algébriques et géométriques.

Propriétés :

- $\varphi^2 = \varphi + 1$
- $\varphi^{-1} = \varphi - 1$
- $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$
- $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+etc}}}$
- $\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+etc}}}$

Découvert dans l'antiquité par les mathématiciens grecs au VI ème siècle av.JC, le nombre d'or a provoqué jusqu'au moyen âge un attrait très important de la part de nombreux savants. D'Euclide à Léonard de Vinci, en passant par Leonardo Fibonacci (dont le quotient de deux termes successifs de sa fameuse suite est justement φ), le nombre d'or a inspiré de nombreuses œuvres, qu'elles soient algébriques, géométriques, ou même biologiques.

De multiples constructions se sont servies du nombre d'or. On le retrouve par exemple dans les pyramides égyptiennes, le Parthénon athénien, ou même dans la plupart des cathédrales de style gothique. Son implication se retrouve aussi dans certaines conceptions de la nature : chez l'homme, le rapport entre la hauteur de l'homme et celle de son nombril est équivalente au nombre d'or, l'organisation des écailles d'une pomme de pin, ou l'enroulement des feuilles de tournesol répondent aussi au nombre d'or.

Bibliographie :

- **Le monde des pavages,**
  A. Deledicq et R. Raba, aux éditions du Kangourou-ACL Éditions.
- **Pavages,**
  N. Berline et C. Sabbah aux éditions de l'école polytechnique
- **Pentaplexity, a class of non periodic tilings of the plane**
  R. Penrose paru dans le magasine Math.Intelligencer 2
- **Shadows of the mind**
  R. Penrose aux éditions Oxford Univ. Press

Webographie :

-La décomposition du triangle :
http://www.ac-nice.fr/maths/coin/autrement/pavages/Penrose/Penrose0.html
-Un programme de décomposition des losanges d'or :
http://www.stephencollins.net/penrose/
-Les espaces topologiques :
http://www.les-mathematiques.net/a/t/g/node1.php3
-Illustrations de pavages de Penrose (Jos Leys) :
http://www.josleys.com/creatures34.htm
-Recueil de liens (très intéressants, mais en anglais) :
http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/penrose.html
-Les 17 groupes de symétries (en anglais) :
http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c5_17WallpaperGroups.html